Тема №7 «Матричные вычисления»

Лекция 1 «Основы работы с матрицами»

1. Простейшие операции с матрицами. Транспортирование.

Простейшие операции матричной алгебры реализованы в Mathcad в виде операторов. Написание операторов по смыслу максимально приближено к их математическому действию. Каждый оператор выражается соответствующим символом Рассмотрим матричные и векторные операции Mathcad 14. Векторы являются частным случаем матриц размерности N x I, поэтому для них справедливы все те операции, что и для матриц, если ограничения особо не оговорены (например некоторые операции применимы только к квадратным матрицам N x N). Какие-то действия допустимы только для векторов (например скалярное произведение), а какие-то, несмотря на одинаковое написание, по-разному действуют на векторы и матрицы.

Непосредственное проведение векторных операций над строками, т. е. матрицами I x N, невозможно, для того чтобы превратить строку в вектор, ее нужно предварительно транспонировать.

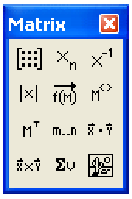

Рис. 1.1. Панель инструментов Matrix

1.2 Транспортирование

Транспортированием называют операцию, переводящую матрицу размерности M x N в матрицу размерности N x M, делая столбцы исходной матрицы строками, а строки – столбцами. Пример приведен в листинге 1. Ввод символа транспонирования (**transpose**) осуществляется с помощью панели инструментов **Matrix** (Матрица) или нажатием клавиш **CTRL + 1**. Не забывайте, что для вставки символа транспонирования матрица должна находиться между линиями ввода.

Листинг 1. Транспонирование векторов и матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.3 Сложение

В Mathcad можно как складывать матрицы, так и вычитать их друг из друга. Для этих операторов применяются символы + или -, соответственно. Матрицы должны иметь одинаковую размерность, иначе будет выдано сообщение об ошибке. Каждый элемент суммы двух матриц равен сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых (листинг 2).

Листинг 2. Сложение и вычитание матриц:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Кроме сложения матриц, Mathcad поддерживает операцию сложения матрицы со скаляром (листинг 3). Каждый элемент результирующей матрицы равен сумме соответствующего элемента исходной матрицы и скалярной величины.

Листинг 3. Сложение матрицы со скаляром:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x := 1$$

$$A + x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Результат смены знака матрицы эквивалентен смене знака всех ее элементов. Для того чтобы изменить знак матрицы, достаточно ввести перед ней знак минуса, как перед обычным числом (листинг 4).

Листинг 4. Смена знака матрицы:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

1.4 Умножение

При умножении следует помнить, что матрицу размерности M x N допустимо умножать только на матрицу размерности N x P (P может быть любым). В результате получается матрица размерности M X P.

Чтобы ввести символ умножения, нужно нажать клавишу со звездочкой * или воспользоваться панелью инструментов Matrix (Матрица), нажав на ней кнопку **Dot Product** (Умножение) (рис. 1.1). Умножение матриц обозначается по умолчанию точкой, как показано в листинге 5. Символ умножения матриц можно выбирать точно так же, как и в скалярных выражениях.

Листинг 5. Умножение матриц:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C := B^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -19 \\ 4 & -43 \end{pmatrix}$$

Еще один пример, относящийся к умножению вектора на матрицу-строку и, наоборот, строки на вектор, приведен в листинге 6. Во второй строке этого листинга показано, как выглядит формула при выборе отображения оператора умножения **No Space** (Вместе).

Листинг 6. Умножение вектора и строки:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Тот же самый оператор умножения действует на два вектора по-другому .

Аналогично сложению матриц со скаляром определяется умножение и деление матрицы на скалярную величину (листинг 7). Символ умножение вводится так же, как и в случае умножения двух матриц. На скаляр можно умножать любую матрицу *M* X *N*.

Листинг 7. Умножение матрицы на скаляр:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{A}{2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 \\ 2 & 2.5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5 Определитель квадратной матрицы. Модуль вектора.

Определитель (**Determinant**) матрицы обозначается стандартным математическим символом. Чтобы ввести оператор нахождения определителя матрицы можно нажать кнопку **Determinant** (Определитель) на панели инструментов **Matrix** (Матрица) (рис. 1.2) или набрать на клавиатуре **|** (нажав клавиши **SHIFT** + \). В результате любого из этих действий появляется местозаполнитель, в который следует поместить матрицу. Чтобы вычислить определитель уже введенной матрицы (именно этот случай показан на рис. 1.2), нужно:

- Переместить курсор в документе таким образом, чтобы поместить матрицу между линиями ввода (напоминаем, что линии ввода – это вертикальный и горизонтальный отрезки синего цвета, образующие уголок, указывающий на текущую область редактирования).
- Ввести оператор нахождения определителя матрицы.
- Ввести знак равенства, чтобы вычислить определитель.

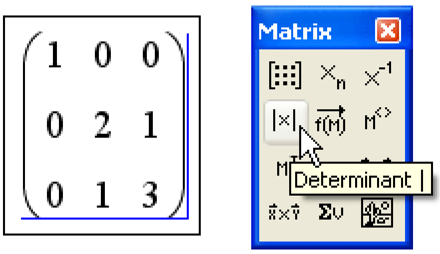

Рис. 1.2. Ввод символа определителя матрицы

Результат вычисления определителя приведен в листинге 8.

Листинг 8. Поиск определителя квадратной матрицы:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 5$$

1.6 Модуль вектора

Модуль вектора (**vector magnitude**) обозначается тем же символом, что и определитель матрицы.

По определению, модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его элементов (листинг 9).

Листинг 9. Поиск модуля вектора:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = 3.742$$

1.7 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов (**vector inner product**) определяется как скаляр, равный сумме попарных произведений соответствующих элементов.

Векторы должны иметь одинаковую размерность, скалярное произведение имеет ту же размерность. Скалярное произведение двух векторов u и v равно $uv=|u||v|cosQ$, где Q – угол между векторами. Если векторы ортогональны, их скалярное произведение равно нулю. Обозначается скалярное произведение тем же символом умножения (листинг 10). Для обозначения скалярного произведения пользователь также может выбирать представление оператора умножения.

<u>Никогда не применяйте для обозначения скалярного произведения символ</u> <u>**x**,</u> который является общеупотребительным символом векторного произведения.

Листинг 10. Скалярное произведение векторов:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 32$$

С осторожностью перемножайте несколько (более двух) векторов. По-разному расставленные скобки полностью изменяют результат умножения.

Примеры такого умножения см. в листинге 11.

Листинг 11. Скалярное произведение векторов, умноженное на третий вектор:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}224\\256\\288\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}224\\256\\288\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}122\\244\\366\end{pmatrix}$$

1.8 Векторное произведение. Сумма элементов вектора и след матрицы.

Векторное произведение (**cross product**) двух векторов *u* и v с углом *Q* между ними равно вектору с модулем |u||v|sinQ, направленным перпендикулярно плоскости векторов *u* и *v*. Обозначают векторное произведение символом **x**, который можно ввести нажатием кнопки **Cross Product** (Векторное произведение) в панели **Matrix** (Матрица) или сочетанием клавиш **CTRL + 8**. Пример приведен в листинге 12.

Листинг 12. Векторное произведение:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

1.9 Сумма элементов вектора и след матрицы

Иногда бывает нужно вычислить сумму всех элементов вектора. Для этого существует вспомогательный оператор (листинг 13, первая строка), задаваемый кнопкой **Vector Sum** (Сумма вектора) на панели **Matrix** (Матрица) или сочетанием клавиш **CTRL + 4**. Этот оператор чаще оказывается полезным не в векторной алгебре, а при организации циклов с индексированными переменными.

На том же листинге 13 (снизу) показано применение операции суммирования диагональных элементов квадратной матрицы. Эту сумму называют следом (**trace**) матрицы. Данная операция организована в виде встроенной **функции tr**:

- tr (A) – след квадратной матрицы A.

Листинг 13. Суммирование элементов вектора и диагонали матрицы:

$$\sum \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad tr(A) = 5$$

1.10 Обратная матрица. Возведение матрицы в степень.

Поиск обратной матрицы возможен, если матрица квадратная и ее определитель не равен нулю (листинг 14). Произведение исходной матрицы на обратную по определению является единичной матрицей. Для ввода оператора поиска обратной матрицы нажмите кнопку **Inverse** (Обратная матрица) на панели инструментов **Matrix** (Матрица).

Листинг 14. Поиск обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{pmatrix}$$

1.11 Возведение матрицы в степень

К квадратным матрицам можно формально применять операцию возведения в степень n. Для этого n должно быть целым числом. Результат данной операции приведен в табл. 1.1. Ввести оператор возведения матрицы м в степень n можно точно так же, как и для скалярной величины: нажав кнопку **Raise to Power** (Возвести в степень) на панели **Calculator** (Калькулятор) или нажав клавишу **A**. После появления местозаполнителя в него следует ввести значение степени n.

Таблица 1.1. Результаты возведения матрицы в степень.

n	M^n
0	единичная матрица размерности матрицы M
1	сама матрица M
-1	M^{-1} – матрица, обратная м
2.3,…	MM, (MM)M,…
-2, -3,…	M^{-1} M^{-1}, (M^{-1} M^{-1})M^{-1}, …

Некоторые примеры возведения матриц в степень приведены в листинге 15.

Листинг 15. Примеры возведения квадратной матрицы в целую степень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3.003 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.111 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в лекции рассмотрены основные действия над матрицами.